

Study of Spatial Autoregressive Regression With Heteroskedasticity Using the Generalized Method of Moments and Bayesian Approach*

Kajian Regresi Spasial Autoregresif dengan Heteroskedastik Menggunakan Generalized Method of Moments dan Pendekatan Bayes

Abialam Koesnandy H¹, Agus M Soleh^{2‡}, and Farit M Afendi³

^{1,2,3}Department of Statistics, IPB University, Indonesia

[‡]corresponding author: agusms@apps.ipb.ac.id

Copyright © 2024 Abialam Koesnandy H, Agus M Soleh, and Farit M Afendi. This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

Spatial dependence and spatial heteroskedasticity are problems in spatial regression. Spatial autoregressive regression (SAR) concerns only to the dependence on lag. The estimation of SAR parameters containing heteroskedasticity using the maximum likelihood estimation (MLE) method provides biased and inconsistent estimators. The alternative method that can be used are generalized method of moments (GMM) and Bayesian method. GMM uses a combination of linear and quadratic moment functions simultaneously so that the computation is easier than MLE. Bayesian method solves heteroskedasticity by modeling the structure of variance-covariance matrix. This study applies and evaluates the GMM and Bayes approach methods in estimating parameters in SAR models containing heteroscedasticity on simulated data and empirical data. The bias is used to evaluate the GMM and Bayes in estimating parameters of SAR model with heteroskedasticity disturbances in simulation data. The results show that GMM and Bayes provides the bias of parameter estimates relatively consistent and smaller with larger number of observations. GMM and Bayes methods are applied to district/city GRDP data in Indonesia. The result show GMM method with Eksponential Distance Weights (EDW) matrix produces the minimum variance and the largest pseudo-R².

Keywords: bayesian method, generalized method of moments, heteroskedasticity, spatial autoregressive regression

* Received: Jan 2024; Reviewed: Jan 2024; Published: Jun 2024

1. Pendahuluan

Analisis regresi merupakan metode statistika yang digunakan untuk melakukan pemodelan hubungan antara peubah respon dan penjelas. Analisis regresi yang dilakukan dengan mempertimbangkan pengaruh atau efek spasial disebut analisis regresi spasial. Menurut Anselin (1988) efek spasial antar lokasi dapat disebabkan oleh dependensi spasial dan keragaman spasial. Dependensi spasial adalah ketergantungan antara suatu lokasi dengan lokasi di sekitarnya. LeSage (1998) dan Anselin (1999) menyatakan dependensi spasial dapat dideskripsikan dalam beberapa cara di model regresi, seperti autoregresif di peubah respon, galat, atau gabungan keduanya. Model dengan dependensi spasial di peubah respon disebut model autoregresif spasial atau spatial autoregressive (SAR), model dengan dependensi spasial pada galat disebut model galat spasial atau spatial error model (SEM), model dengan dependensi spasial pada keduanya disebut model spasial umum atau generalized spatial model (GSM). Keragaman spasial diakibatkan oleh perbedaan pengaruh peubah penjelas terhadap respon di lokasi yang diamati. Fotheringham et al. (2002) menyatakan keragaman spasial dapat diatasi salah satunya dengan menggunakan regresi terboboti geografis (RTG) atau geographically weighted regression (GWR).

Ord (1975) memperkenalkan metode pendugaan parameter regresi spasial dengan metode kemungkinan maksimum (maximum likelihood/ML). Kelejian dan Prucha (1999) menyatakan metode ML tergantung pada asumsi bahwa galat menyebar normal dan ragamnya homogen. Anselin (1988) memperkenalkan metode kuadrat terkecil dua tahap atau spatial two-stage least squares (S2SLS) dengan sifat penduga ini bersifat konsisten dan asimtotik normal. Metode MLE dan S2SLS hanya dapat digunakan bila galat bersifat bebas stokastik dan identik. Kelejian dan Prucha (1999) mengemukakan metode momen terampat atau generalized method of moments (GMM) dapat menghasilkan penduga yang efisien dan komputasinya lebih mudah dibandingkan metode ML. Namun, Hasil penduga dari ketiga metode ini pada model SAR bersifat tidak konsisten dan tidak valid jika terdapat masalah heteroskedastik pada komponen galat (Doğan & Taşpınar, 2014).

Masalah heteroskedastik pada data agregasi berasal dari proses merata-ratakan data dengan banyaknya amatan yang berbeda pada saat agregasi (Griffiths, 2007; Lee & Liu, 2010). Hal ini menyebabkan penduga ML menjadi tidak valid. Terdapat beberapa metode alternatif yang dapat dilakukan terhadap heteroskedastik yaitu dengan metode GMM yang kekar terhadap heteroskedastik (Kelejian & Prucha, 2010) dan Bayes (Anselin, 1982, 1988). Pada pendekatan GMM termodifikasi, parameter dari model spasial secara simultan diduga dengan GMM dengan formula kombinasi fungsi momen linear dan kuadratik. Pendekatan Bayes dilakukan dengan memodelkan struktur matriks ragam-peragam data spasial yang memungkinkan model yang fleksibel untuk setiap sebaran yang bermasalah dengan tingkat akurasi yang tinggi (Koop, 2003).

Penelitian mengenai setiap metode pernah dilakukan pada data yang mengandung heteroskedastik diantaranya Fitri (2019) menyimpulkan hasil simulasi metode bayes keseluruhan nilai bias lebih kecil dibandingkan dengan metode MLE dan hasil pada

data riil produk domestik regional bruto (PDRB) memperoleh nilai pseudo-R2 paling besar 75,64%, Rohimatul Anwar (2019) menyimpulkan hasil simulasi metode GMM memberikan nilai bias lebih kecil dibandingkan MLE dan hasil pada data PDRB memperoleh nilai pseudo-R2 paling besar 77,3%.

Pada penelitian ini bertujuan menerapkan dan mengevaluasi metode pendekatan GMM dan bayes dalam menduga parameter pada model SAR yang mengandung heteroskedastik pada data simulasi dan data riil. Hasil evaluasi dari pendugaan parameter kedua metode dievaluasi untuk melihat metode yang terbaik. Penerapan metode dilakukan pada data PDRB kabupaten/kota tahun 2022 sebagai peubah respons. Kondisi PDRB kabupaten/kota di Indonesia yang beragam memungkinkan beberapa wilayah memiliki nilai yang berbeda dari wilayah lainnya. Peubah-peubah penjelas yang digunakan adalah indeks pembangunan manusia, upah minimum kabupaten, jumlah tenaga kerja, dan pendapatan asli daerah.

2. Metodologi

2.1 Bahan dan Data

Data yang akan digunakan pada penelitian terdapat dua jenis data yaitu data simulasi dan data sekunder yang bersumber dari Badan Pusat Statistik (BPS). Data simulasi dibangkitkan dengan skenario yang dilakukan dalam Arraiz *et al.* (2010). Tahapan bangkitan data simulasi sebagai berikut:

- 1) Model yang digunakan adalah SAR, $y = \rho W y + X \beta + \varepsilon$ dengan banyak amatan $n=30,90,900$ dan peubah penjelas sebanyak dua dan tanpa intersep, sehingga $X=(x_{1i}, x_{2i})$ dengan $i=1,2,\dots,n$ dan $\beta=(\beta_1, \beta_2)'$ dengan koefisien $\beta=(1, 2)'$.
- 2) Peubah penjelas x_1 dan x_2 adalah vektor berukuran $n \times 1$ dan dibangkitkan dari sebaran normal yaitu $N(0,1)$. Simulasi pembangkitan data pada langkah ini diulang sebanyak 1000 kali.
- 3) Koefisien autoregresif pada model SAR, ρ yang digunakan adalah $\rho = (-0,8; -0,5; -0,2; 0; 0,2; 0,5; 0,8)$ yang menggambarkan interaksi spasial.
- 4) Membuat dua jenis matriks pembobot yang digunakan pada Arraiz *et al.* (2010) dan komponen heteroskedastik dengan langkah sebagai berikut.
 - a. Matriks pertama merupakan *circular world matrix* diperkenalkan oleh Kelejian dan Prucha (1999) dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - i. Membuat matriks berukuran $n \times n$. Membagi tiga bagian matriks $n \times n$ dengan $\frac{n}{3}$ matriks pertama (kecuali pada baris pertama) semua elemen bernilai nol kecuali pada posisi $(i, i+1)$ dan $(i, i-1)$.
 - ii. Baris pertama bernilai tidak nol pada posisi $(1,2)$ dan $(1,n)$.
 - iii. $\frac{n}{3}$ matriks ke dua atau $j=\frac{n}{3} + 1, \dots, \frac{2n}{3}$ memiliki 2 tetangga dengan elemen tidak nol pada $(j, j\pm r)$, dengan $r = 1, 2, \dots, 5$ sehingga jumlah elemen tidak nolnya adalah 10. Banyak tetangga pada baris ini sebanyak 10.
 - iv. $\frac{n}{3}$ matriks terakhir atau $j = \frac{2n}{3} + 1, \dots, n-1$ bernilai tidak nol pada posisi $(j, j+1)$ dan $(j, j-1)$.
 - v. Elemen tidak nol pada baris terakhir pada $(n, 1)$ dan $(n, n-1)$. Banyak tetangga pada baris ini sebanyak 2.
 - vi. Standarisasi matriks
 - b. Matriks ke dua adalah *small group interaction* yang diperkenalkan oleh Liu *et al.* (2010). Matriks ini berupa matriks blok diagonal yang setiap blok

menggambarkan interaksi kelompok. Ukuran blok berasal dari distribusi seragam, $U(3,20)$. Misalkan $\{g_1, \dots, g_G\}$ sebagai suatu grup dengan G adalah banyaknya grup. Ukuran grup adalah m_i , dengan $i=1, \dots, G$. Blok dari grup i adalah $B_i = \frac{1}{m_i-1} (l_{mi}l_{mi}-I_{m_i})$, dengan l_{mi} adalah vektor 1 berukuran $m_i \times 1$. Matriks bobot adalah $\mathbf{W}_n = \text{diag}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_G)$.

- c. Pembangkitan heteroskedastik menggunakan banyaknya unit tetangga berdasarkan Arraiz et al. (2010). Misalkan h_i adalah banyaknya tetangga dari unit ke- i . Selanjutnya galat ε dengan elemen ε_i dibangkitkan dengan teknik berikut ini: $\varepsilon_i = \sigma_i \varphi_i$, dengan $\sigma_i = c \left(h_i / \left(\sum_{j=1}^n h_j / n \right) \right)$

Koefisien c yang digunakan merupakan rasio *signal-noise* dari model, dengan koefisien yang optimal adalah $c=0.5$.

Data sekunder yang digunakan yaitu data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) tahun 2022 sebagai peubah respon. Peubah penjelas yaitu Upah Minimum Kabupaten (UMK), Jumlah Tenaga Kerja (JTK), Indeks Pembangunan Manusia (IPM), Pendapatan Asli Daerah (PAD). Data penelitian mencakup seluruh kabupaten/kota di Indonesia tahun 2022 sebanyak 514 wilayah kabupaten/kota.

Tabel 1: Daftar Peubah Yang Digunakan

No	Peubah	Keterangan	Singkatan	Satuan
1	Y	Produk Domestik Regional Bruto	PDRB	Triliun rupiah
2	X1	Indeks Pembangunan Manusia	IPM	Persen
3	X2	Upah Minimum Kabupaten	UMK	Juta Rupiah
4	X3	Jumlah Tenaga Kerja	JTK	Ribu Jiwa
5	X4	Pendapatan Asli Daerah	PAD	Juta rupiah

2.2 Metode Penelitian

Data dianalisis menggunakan *software R version 4.0.3* dan *Matlab R2022a*. Terdapat beberapa metode yang diterapkan pada penelitian ini, yaitu metode GMM dan Bayes. Langkah-langkah analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1) Data Simulasi

- a. Membangkitkan data simulasi
- b. Pendugaan Parameter dengan metode GMM
 - i. Membuat matriks $\mathbf{W}_y, \mathbf{W}_S^{-1}, \mathbf{X}, \beta, \mathbf{X}\beta, \varepsilon$.
 - ii. Membuat matriks \mathbf{Q} yang dibangun dari fungsi \mathbf{W} dan \mathbf{X} .
 - iii. Membuat $g_n(\theta)$ yang merupakan vektor dari fungsi momen yang elemennya adalah momen sampel.
 - iv. $\mathbf{Q}'\varepsilon(\theta)$ digunakan untuk momen linear dan $\varepsilon(\theta)' \mathbf{P}_j \varepsilon(\theta)$ untuk momen kuadrat.
 - v. Membuat Ω^{-1} merupakan matriks peragam yang digunakan sebagai matriks bobot pada pendugaan GMM.
 - vi. Meminimumkan $g_n(\theta)' \Omega^{-1} g_n(\theta)$ untuk menduga $\theta = (\rho, \beta)$.
- c. Pendugaan parameter model dengan metode Bayes, yaitu mendefinisikan

sebaran prior untuk masing-masing hiperparameter kemudian mencari sebaran posteriornya menggunakan MCMC.

- d. Mengevaluasi pendugaan parameter berdasarkan nilai bias, dimana Bias $(\hat{\beta}_i) = \beta_i - \hat{\beta}_i$, dengan β_i adalah nilai koefisien parameter β simulasi ke- i dan $\hat{\beta}_i$ adalah nilai koefisien dugaan parameter β simulasi ke- i .

2) Data Riil

- a. Melakukan eksplorasi data menggunakan analisis statistik deskriptif pada data PDRB kabupaten/kota tahun 2022.
- b. Melakukan identifikasi adanya masalah multikolinieritas peubah prediktor dengan menghitung nilai *Variance Inflation Factor* (VIF).
- c. Melakukan pembentukan matriks pembobot spasial.

Penelitian ini menggunakan tiga matriks pembobot yaitu *k-Nearest Neighbor* (*k*-NN), *Exponential Distance Weights* (EDW), *Queen Contiguity* (QCont). Matriks bobot *k*-NN merupakan matriks yang mengurutkan jarak pusat d setiap unit spasial i dengan seluruh unit spasial $j \neq i$ pada n amatan, $d_{ij(1)} \leq d_{ij(2)} \leq \dots \leq d_{ij(n-1)}$. Untuk setiap besarnya jarak terdekat $k=1, \dots, n-1$, himpunan unit spasial terdekat $N_k(i) = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\}$ memuat k unit terdekat dengan i sehingga matriks bobot *k*-NN, W , mempunyai bobot spasial dengan elemen yang telah dinormalisasi sebagai berikut:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1/k, j \in N_k(i) \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

Matriks EDW merupakan matriks sebuah alternative pada fungsi eksponensial negative berdasarkan jarak pusat unit spasial i dan j , dimana:

$$d_{ij} = [(l_i + l_j)^2 + (b_i + b_j)^2]^{1/2}$$

dengan d_{ij} adalah jarak unit spasial ke- i terhadap unit ke- j , sedangkan l dan b merupakan koordinat Lintang dan Bujur. Sehingga matriks bobot EDW, W dengan elemen sebagai berikut:

$$w_{ij} = \exp(-\alpha(d_{ij}))$$

Matriks QCont menggunakan batas sebagai indikasi adanya tetangga. Matriks QCont memberikan informasi yang didapatkan dari wilayah yang menjadi tetangga dari suatu wilayah ke- i lebih lengkap jika dibandingkan matriks contiguity lainnya. Matriks pembobot yang digunakan berdasarkan tetangga didefinisikan oleh LeSage (1999) sebagai berikut:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika } j \text{ merupakan tetangga terdekat } i \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

- d. Melakukan identifikasi pengaruh spasial.
 - a. Menguji autokorelasi spasial dengan *Indeks Moran*.
 - b. Menguji keragaman spasial menggunakan uji *Breusch-Pagan* (BP).
 - c. Menguji efek depedensi spasial dengan *Lagrange Multiplier* (LM).
- e. Melakukan pendugaan parameter dengan metode GMM dan pendekatan bayes.
- f. Melakukan evaluasi perbandingan hasil pendugaan parameter berdasarkan ragam sisaan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$ dan *pseudo-R*² = $1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ dengan n adalah banyaknya wilayah, y_i adalah nilai PDRB di wilayah ke- i , \bar{y} adalah rata-rata nilai

PDRB, dan \hat{y}_i adalah nilai dugaan PDRB di wilayah ke- i .

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Evaluasi Penduga Parameter

Kajian simulasi dilakukan pada metode GMM dan bayes dengan menggunakan 2 matriks pembobot yaitu matriks *circular world* (CW) dan *small group interaction* (SGI). Kedua metode dibandingkan dengan mengevaluasi nilai bias pedugaan parameter ρ , β_1 dan β_2 untuk melihat keragaman hasil dugaan parameter dari metode GMM dan Bayes. Hasil nilai bias disajikan dalam bentuk tabel perbandingan nilai rataan dan ragam bias untuk kedua metode. Nilai bias yang kecil mendekati 0 mengindikasikan dugaan parameter yang lebih baik, sedangkan keragaman bias yang kecil mengindikasikan kekonsistenan dugaan parameter.

Perbandingan nilai rataan dan keragaman bias dugaan parameter ρ pada metode GMM dan bayes dengan $n=30$ disajikan pada Tabel 2 dan Tabel 3. Tabel 2 metode GMM memberikan rataan nilai bias yang lebih kecil daripada metode bayes di kedua matriks pembobot. Hal tersebut mengindikasikan metode GMM menghasilkan dugaan parameter ρ yang lebih baik. Tabel 3 menunjukkan nilai keragaman bias dugaan parameter ρ , metode bayes memiliki nilai keragaman yang lebih kecil daripada metode GMM. Hal tersebut mengindikasikan metode bayes lebih konsisten dalam menduga parameter. Namun nilai bias pada metode bayes pada autokorelasi negatif cenderung *under estimate*, sedangkan saat autokorelasi positif nilai cenderung *over estimate*. Nilai rataan bias yang lebih mendekati 0 terdapat pada metode GMM dengan matriks CW dengan nilai keragaman yang tidak jauh berbeda dengan metode bayes. Hal tersebut mengindikasikan metode GMM dengan matriks CW memberikan dugaan parameter yang lebih baik dalam menduga parameter ρ . Hasil simulasi metode GMM dan bayes pada $n=90$ dan $n=900$ menunjukkan pola yang sama seperti pada $n=30$ (Tabel 2 dan Tabel 3) dengan nilai bias yang semakin kecil disekitar nilai 0 seiring bertambah jumlah amatan.

Tabel 2: Rataan Nilai Bias Metode GMM dan Bayes pada $n=30$ untuk penduga ρ

Matriks	Metode	Rataan nilai pada autokorelasi						
		-0,8	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	0,8
CW	GMM	0,0003	-0,0008	-0,0014	-0,0018	-0,0006	-0,0003	0,0004
	Bayes	-0,0114	-0,0109	-0,0029	0,0037	0,0098	0,0151	0,0123
SGI	GMM	0,0007	0,0041	0,0034	0,0078	0,0063	0,0054	0,0004
	Bayes	-0,0389	0,0398	0,0548	0,05458	0,0497	0,0365	0,0175

Tabel 3: Ragam Nilai Bias Metode GMM dan Bayes pada $n=30$ untuk penduga ρ

Matriks	Metode	Keragaman nilai bias pada autokorelasi						
		-0,8	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	0,8
CW	GMM	0,0023	0,0023	0,0023	0,0022	0,0022	0,0023	0,0023
	Bayes	0,0004	0,0008	0,0012	0,0014	0,0015	0,0013	0,0006
SGI	GMM	0,0372	0,0288	0,0275	0,0256	0,0224	0,0344	0,0355
	Bayes	0,0061	0,0081	0,0095	0,0090	0,0076	0,0043	0,0011

Perbandingan nilai rataan dan keragaman bias dugaan parameter β_1 pada metode GMM dan bayes dengan $n=30$ disajikan pada Tabel 4 dan Tabel 5. Tabel 4

menunjukkan metode GMM dengan matriks pembobot SGI memberikan rata-ran nilai bias yang lebih kecil daripada metode bayes. Tabel 5 menunjukkan metode bayes memiliki nilai keragaman bias yang lebih kecil dibandingkan dengan metode GMM pada kedua matriks pembobot. Hal tersebut menunjukkan metode bayes lebih konsisten dalam menduga parameter β_1 . Berdasarkan nilai rata-ran dan keragaman bias dalam menduga parameter β_1 metode bayes dengan matriks pembobot CW memiliki nilai rata-ran dan keragaman bias yang lebih baik. Hasil simulasi $n=90$ dan $n=900$ untuk penduga β_1 metode GMM dan bayes juga memberikan pola yang sama seperti pada $n=30$ (Tabel 4 dan 5) namun dengan nilai bias yang lebih kecil mendekati 0 seiring semakin besar jumlah amatan.

Tabel 4: Rataan Nilai Bias Metode GMM dan Bayes pada $n=30$ untuk penduga β_1

Matriks	Metode	Rataan nilai bias pada autokorelasi						
		-0,8	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	0,8
CW	GMM	-0,0019	-0,0025	-0,0027	-0,0022	-0,0025	-0,0021	-0,0020
	Bayes	-0,0047	-0,0015	0,0004	0,0005	0,000005	-0,0029	-0,0066
SGI	GMM	0,0011	0,0014	0,0014	0,0018	0,0017	0,0017	0,0010
	Bayes	-0,0019	0,0042	0,0050	0,0044	0,0034	0,0012	-0,0016

Tabel 5: Ragam Nilai Bias Metode GMM dan Bayes pada $n=30$ untuk penduga β_1

Matriks	Metode	Keragaman nilai bias pada autokorelasi						
		-0,8	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	0,8
CW	GMM	0,0193	0,0195	0,0195	0,0191	0,0193	0,0196	0,0196
	Bayes	0,0061	0,0059	0,0057	0,0057	0,0057	0,0059	0,0061
SGI	GMM	0,0071	0,0069	0,0069	0,0069	0,0068	0,0069	0,0071
	Bayes	0,0061	0,0061	0,0061	0,0062	0,0062	0,0063	0,0065

Perbandingan nilai rata-ran dan keragaman bias dugaan parameter β_2 pada metode GMM dan bayes dengan $n=30$ disajikan pada Tabel 6 dan Tabel 7. Tabel 6 secara keseluruhan menunjukkan metode GMM memberikan rata-ran nilai bias yang lebih kecil mendekati 0 daripada metode bayes. Tabel 7 menunjukkan pada metode bayes memiliki nilai keragaman yang lebih kecil daripada metode GMM, mengindikasikan metode bayes lebih konsisten dalam menduga parameter dibandingkan metode GMM. Berdasarkan nilai rata-ran dan keragaman bias dalam menduga parameter β_2 metode Bayes dengan matriks pembobot CW memiliki nilai rata-ran dan keragaman bias yang lebih optimal. Hasil simulasi $n=90$ dan $n=900$ untuk penduga β_2 juga memberikan pola yang sama seperti pada $n=30$ (Tabel 6 dan 7) namun dengan nilai bias yang lebih kecil mendekati 0 seiring semakin besar jumlah amatan.

Tabel 6: Rataan Nilai Bias Metode GMM dan Bayes pada $n=30$ untuk penduga β_2

Matriks	Metode	Rataan nilai bias pada autokorelasi						
		-0,8	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	0,8
CW	GMM	0,0041	0,0031	0,0030	0,0030	0,0018	0,0032	0,0037
	Bayes	-0,0079	-0,0012	0,0031	0,0038	0,0023	-0,0024	-0,0090
SGI	GMM	-0,0028	-0,0022	-0,0024	-0,0013	-0,0014	-0,0016	-0,0029
	Bayes	-0,0105	0,0028	0,0046	0,0037	0,0019	-0,0024	-0,0080

Tabel 7: Ragam Nilai Bias Metode GMM dan Bayes pada n=30 untuk penduga β_2

Matriks	Metode	Keragaman nilai bias pada autokorelasi						
		-0,8	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	0,8
CW	GMM	0,0199	0,0196	0,0196	0,0197	0,0202	0,0203	0,0201
	Bayes	0,0072	0,0065	0,0059	0,0058	0,0058	0,0062	0,0067
SGI	GMM	0,0087	0,0084	0,0085	0,0083	0,0080	0,0086	0,0087
	Bayes	0,0065	0,0066	0,0069	0,0070	0,0072	0,0073	0,0075

3.2 Pemodelan Data PDRB

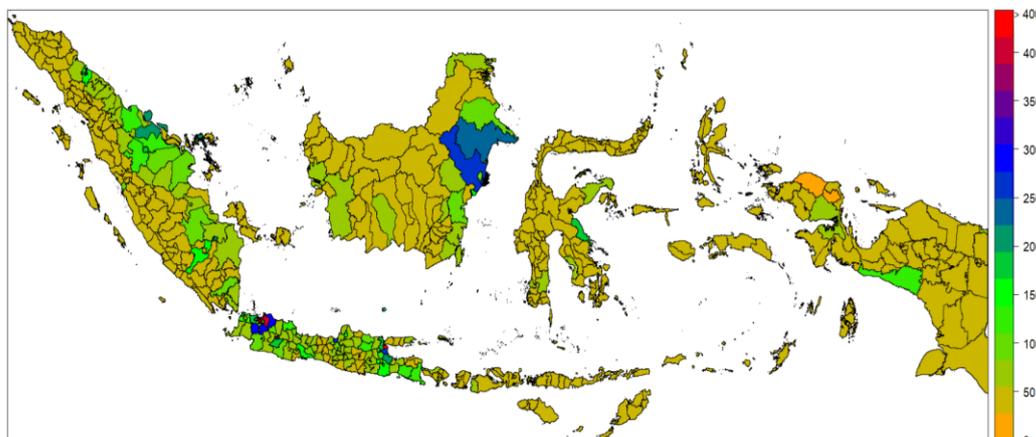
Ekplorasi Data

Produk domestik regional bruto (PDRB) adalah besarnya produk domestik bruto (PDB) suatu daerah nilai PDRB dapat menggambarkan kondisi ekonomi yang dapat dijadikan parameter makro ekonomi, baik dalam skala nasional maupun skala regional suatu negara atau daerah. Provinsi dengan rata-rata PDRB kab/kota tertinggi adalah Provinsi DKI Jakarta. Hal ini mengindikasikan bahwa tingginya tingkat pertumbuhan ekonomi. Sedangkan untuk rata-rata PDRB kabupaten/kota terendah terjadi di Provinsi Maluku. Kabupaten/kota dengan nilai PDRB terendah adalah Kabupaten Tambrauw, sedangkan kabupaten/kota dengan nilai PDRB tertinggi adalah Kota Jakarta Pusat. Ringkasan deskripsi data PDRB kabupaten/kota tahun 2022 disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8: Deskripsi data PDRB kab/kota 2022

Statistik	PDRB (Triliun Rupiah)
Rataan	37,3503
Simpangan Baku	81,0479
Minimum	794,9358 (Jakarta Pusat)
Maksimum	0,2559 (Tambrauw)

Penyebaran nilai PDRB kabupaten/kota di Indonesia yang berbeda-beda disajikan pada Gambar 1. Penyebaran PDRB cenderung memiliki kesamaan dengan daerah di sekitarnya, mengindikasikan adanya hubungan spasial antar daerah. Hal ini dapat dilihat dari daerah yang berwarna merah (PDRB tinggi) berada di sekitar daerah yang memiliki PDRB tinggi atau sedang. Sedangkan daerah yang berwarna semakin kuning (PDRB rendah) cenderung berada di sekitar daerah yang memiliki warna yang sama.



Gambar 1: Sebaran Nilai PDRB Kabupaten/Kota di Indonesia Tahun 2022

Pada Tabel 9 terlihat nilai korelasi antar peubah bebas dengan nilai koefisien korelasi terendah sebesar 0,06 antara indeks pembangunan manusia dengan upah minimum kabupaten. Peubah bebas yang memiliki nilai korelasi tertinggi sebesar 0,56 antara jumlah tenaga kerja dengan pendapatan asli daerah.

Tabel 9: Nilai korelasi antar peubah bebas

Peubah	X1 (IPM)	X2 (UMK)	X3(JTK)
X2 (UMK)	0,06		
X3 (JTK)	0,28	0,13	
X4 (PAD)	0,36	0,43	0,56

Menurut Marcus *et al.* (2012), dua peubah dikatakan memiliki hubungan yang kuat jika memiliki nilai mutlak korelasi atau $|r|$ sama dengan 0,75. Hasil pada Tabel 9 menunjukkan antar peubah penjelas yang digunakan tidak memiliki korelasi lebih dari 0,75, sehingga dapat dikatakan bahwa tidak terdapat hubungan yang kuat pada peubah-peubah penjelas yang digunakan. Adanya korelasi yang tinggi antar peubah bebas mengindikasikan tidak terpenuhinya asumsi multikolinieritas pada regresi linier berganda. Hal tersebut diperkuat dengan nilai VIF pada masing-masing peubah penjelas yang disajikan pada Tabel 10.

Tabel 10: Nilai VIF setiap peubah bebas

Peubah	VIF
X1 (IPM)	1,1688
X2 (UMK)	1,2646
X3 (JTK)	1,4929
X4 (PAD)	1,9229

Menurut Chatterjee & Hadi (2006) dan Marcus *et al.* (2012), dikatakan terdapat multikolinearitas antar peubah penjelas pada model regresi jika memiliki nilai VIF lebih dari 10. Tabel 10 menunjukkan tidak terdapat peubah penjelas yang memiliki nilai VIF lebih dari 10. Hal tersebut membuktikan tidak adanya multikolinearitas pada peubah penjelas yang digunakan.

Uji Efek Spasial

Pemeriksaan autokorelasi dan efek ketergantungan spasial dilakukan dengan uji *Breusch Pagan* (BP) dan menguji nilai Indeks Moran dengan menggunakan tiga betuk matriks pembobot pada data PDRB kabupaten/kota di Indonesia tahun 2022 disajikan pada Tabel 11. Pada nilai Indeks Moran memiliki nilai p -value sebesar $4,499 \times 10^{-8}$ (k -NN), $7,755 \times 10^{-4}$ (EDW), dan $9,703 \times 10^{-16}$ (QCont) yang mengindikasikan ketiganya signifikan pada taraf nyata 5%. Hasil ini mengindikasikan bahwa terdapat autokorelasi spasial positif ($I > 0$) antar PDRB di setiap kabupaten/kota yang berdekatan.

Tabel 11: Hasil uji breusch pagan (BP) dan indeks moran

Matriks Pembobot	Nilai Uji BP	Indeks Moran
k-NN	207,29*	0,2187*
EDW	215,97*	0,0651*
QCont	212,73*	0,2825*

*)nyata pada taraf 5%

Uji BP menghasilkan nilai BP dengan nilai p (*p-value*) pada ketiga matriks lebih kecil dari $2,2 \times 10^{-16}$ yang berarti signifikan pada taraf nyata 5%. Hal ini menunjukkan bahwa kehomogenan ragam spasial tidak terpenuhi atau terjadi masalah heteroskedastik pada data.

Uji Lagrange Multiplier (LM) dilakukan untuk mengetahui model spasial yang akan digunakan. Uji LM menguji efek ketergantungan spasial dalam respon maupun galat. Tabel 5 menunjukkan hasil uji ketergantungan spasial dengan uji LM. Hasil uji nilai ketergantungan spasial dalam *lag* (SAR) pada ketiga metode memiliki *p-value* lebih kecil dari taraf nyata 5%, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat ketergantungan spasial dalam *lag*. Selain itu, nilai ketergantungan spasial dalam *error* (SEM) dan keduanya (GSM) signifikan pada taraf nyata 5%.

Tabel 12: Hasil statistik uji lagrange multiplier

Model	Matriks Pembobot		
	k-NN	EDW	QCont
LM lag (SAR)	14,4379**	7,2670**	13,4154**
LM galat (SEM)	29,2389**	10,4480**	63,1605**
SARMA	29,2523**	34,4930**	68,4174**
Robust LM lag	0,01347	24,0450**	5,2569*
Robust LM galat	29,2524**	27,2260**	55,0020**

*nyata pada taraf 5%

**nyata pada taraf 1%

Pendugaan Parameter dengan GMM dan Bayes pada Model SAR

Hasil dugaan parameter model disertai dengan nilai ragam sisaan dan *pseudo-R²* yang merupakan ukuran kebaikan modelnya disajikan pada Tabel 13. Hasil kajian empiris pada Tabel 13 menunjukkan seluruh peubah penjelas berpengaruh nyata terhadap PDRB kabupaten/kota pada tahun 2022 pada taraf 5%.

Tabel 13: Penduga parameter, ragam, dan pseudo-R2 metode GMM dan Bayes

Koefisien	Para meter	Metode GMM			Metode Bayes		
		k-NN	EDW	QCont	k-NN	EDW	QCont
Rho	ρ	0,669	-0,319*	-0,065	0,016	-0,048*	0,211
Intercept	K	-94,054*	-114,54*	-110,80*	-34,17*	-37,36*	-34,243*
IPM (X1)	β_1	0,799*	1,053*	0,949*	0,199*	0,243*	0,197*
UMK (X2)	β_2	14,125*	17,480*	17,053*	7,570*	7,894*	7,596*
JTK (X3)	β_3	0,049*	0,071*	0,055*	0,034*	0,039*	0,034*
PAD (X4)	β_4	0,055*	0,061*	0,061*	0,063*	0,064*	0,063*
Ragam Sisaan		1494,40	1491,00	1573,90	1595,46	1571,83	1594,86
Pseudo R ²		77,47%	77,52%	76,27%	75,90%	76,26%	75,91%

*nyata pada taraf 5%

Matriks EDW menghasilkan ragam sisaan minimum dan nilai *pseudo-R²* terbesar pada metode GMM dan Bayes yaitu 1491(77,52%) dan 1571,83(76,26%). Nilai *pseudo-R²* pada metode GMM matriks EDW menggambarkan keragaman PDRB sebesar 77,52%, sisanya 23,48% dijelaskan oleh faktor lain di luar model. Nilai ini

sudah cukup baik untuk menggambarkan PDRB. Nilai *pseudo-R*² untuk setiap matriks bobot dapat dilihat pada Tabel 13.

4. Simpulan dan Saran

Metode GMM dan Bayes dapat digunakan pada pemodelan SAR yang mengandung heteroskedastik. Metode GMM menghasilkan nilai bias yang lebih kecil dibandingkan metode bayes. Kekonsistenan hasil simulasi ditunjukkan oleh metode bayes dengan nilai keragaman yang diperoleh lebih kecil dibandingkan metode GMM. Perbedaan nilai interaksi spasial tidak berpengaruh signifikan terhadap nilai bias pada metode GMM dan Bayes.

Penerapan data dilakukan pada data PDRB kabupaten/kota di Indonesia tahun 2022 menggunakan metode GMM dan Bayes dengan matriks pembobot k-NN, EDW, dan QCont. Pemilihan metode dan matriks pembobot yang tepat pada data PDRB adalah metode GMM dengan pembobot EDW yang menghasilkan nilai ragam paling minimum yaitu 1491 dan *pseudo-R*² paling besar yaitu 77.52%. Secara keseluruhan, besarnya nilai PDRB di suatu kabupaten/kota di Indonesia dipengaruhi faktor indeks pembangunan manusia, upah minimum kabupaten, jumlah tenaga kerja, dan pendapatan asli daerah pada taraf nyata 5% sehingga untuk mengambil keputusan dan kebijakan yang tepat terkait nilai PDRB kabupaten/kota di Indonesia, seluruh peubah ini layak untuk lebih dipertimbangkan.

Daftar Pustaka

- Anselin, L. (1982). A note on small sample properties of estimators in a first-order spatial autoregressive model (Bayesian). *Environment & Planning A*, 14(8): 1023–1030.
- Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Dordrecht (NL): Kluwer Academic Publ.
- Anselin, L. (1999). *Spatial Econometrics*. Dallas (GB): University of Texas.
- Anwar, R. (2019). *Pemodelan Regresi Spasial Autoregresif dengan Gangguan Heteroskedastik Menggunakan Generalized Method of Moments*. Institut Pertanian Bogor.
- Arraiz, I., Drukker, D., Kelejian, H. H., & Prucha, I. (2010). A Spatial Cliff-ord-type Model with Heteroskedastic Innovations: small and large sample results. *Journal of Regional Science*, 50(2): 592–614. Retrieved from <https://econpapers.repec.org/RePEc:bla:jregsc:v:50:y:2010:i:2:p:592-614>
- Doğan, O., & Taşpınar, S. (2014). Spatial autoregressive models with unknown heteroskedasticity: A comparison of Bayesian and robust GMM approach. *Regional Science and Urban Economics*, 45: 1–21. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.regsciurbeco.2013.12.003>
- Fitri, R. (2019). *Pemodelan Regresi Spasial Autoregresif dengan Heteroskedastik Menggunakan Pendekatan Bayes*. Institut Pertanian Bogor.
- Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., & Charlton, M. (2002). *Geographically Weighted*

Regression: the analysis of spatially varying relationships. England: John Wiley & Sons Ltd.

Griffiths, W. (2007). *A Companion to Theoretical Econometrics*. New Jersey (US): Blackwell Publ.

Kelejian, H. H., & Prucha, I. R. (1999). A Generalized Moments Estimator for the Autoregressive Parameter in a Spatial Model. *International Economic Review*, 40(2): 509–533.

Kelejian, H. H., & Prucha, I. R. (2010). Specification and Estimation of Spatial Autoregressive Models with Autoregressive and Heteroskedastic Disturbances. *Journal of Econometrics*, 157(1): 53–67.
<https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2009.10.025>

Koop, G. (2003). *Bayesian Econometrics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Lee, L., & Liu, X. (2010). Efficient GMM Estimation of High Order Spatial Autoregressive Models. *Econometric Theory*, 26(1): 187–230.

Ord, K. (1975). Estimation Methods for Models of Spatial Interaction. *Journal of the American Statistical Association*, 70(349): 37–41.